

# Äquivalenz der Gaußdarstellung und der Henkeldarstellung der $\Gamma$ -Funktion

Nikolaus Hammler  
0430119  
nobaq@sbox.tugraz.at

01. Mai 2008

Es ist zu zeigen:

$$\binom{n + \alpha - 1}{n} \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

Für den Binomialkoeffizienten gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{k!}$$

und damit für

$$\binom{n + \alpha - 1}{n} = \frac{(n + \alpha - 1)(n + \alpha - 2)\dots\alpha}{n!} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}$$

Wenn sich die linke wie die rechte Seite verhält, dann unterscheiden sich beide Seiten nur durch einen Proportionalitätsfaktor bzw. der Quotient muss im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  eins werden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + \alpha - 1)(n + \alpha - 2)\dots\alpha}{n! \cdot n^{\alpha+1}} \cdot \Gamma(\alpha) = 1$$

$\Gamma(\alpha)$  kann nun vor den Limes gehoben werden, da es nicht von  $n$  abhängt:

$$\Gamma(\alpha) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + \alpha - 1)(n + \alpha - 2)\dots\alpha}{n! \cdot n^{\alpha+1}} = 1$$

Jetzt wird noch der Reziprokwert gebildet:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{\alpha+1}}{(n + \alpha - 1)(n + \alpha - 2)\dots\alpha} = 1$$

Aus dieser Zeile erkennt man sofort, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{\alpha+1}}{(n + \alpha - 1)(n + \alpha - 2) \dots \alpha}$$

die  $\Gamma$ -Funktion sein muss. Erweitert man den Bruch mit

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\alpha + n}$$

so erhält man die Darstellung der  $\Gamma$ -Funktion nach Gauß:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{\alpha+1}}{(n + \alpha - 1)(n + \alpha - 2) \dots \alpha} \cdot \frac{n}{\alpha + n} \\ = & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{\alpha}}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n)} \end{aligned}$$

Nun muss nur mehr gezeigt werden, dass die Gauß-Darstellung der  $\Gamma$ -Funktion äquivalent mit der Henkeldarstellung ist, d.h., dass folgende Gleichung gilt: ■

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{s+1}}{(n + s - 1)(n + s - 2) \dots s} \cdot \frac{n}{s + n} \\ = & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^{s-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx \\ = & \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \end{aligned}$$

Um das analytisch zu zeigen, wird einfach versucht, das Integral auszurechnen. Da von  $x^{s-1}$  das Integral leicht zu berechnen ist, wird die partielle Integration angewandt:

$$\begin{aligned} & \int_0^n x^{s-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx \\ = & \frac{x^s}{s} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \Big|_0^n + \int_0^n \frac{x^s}{s} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx \\ = & \frac{1}{s} \int_0^n x^s \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx \end{aligned}$$

Nun wird noch einmal partiell integriert:

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{s} \left( \frac{x^{s+1}}{s+1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \Big|_0^n - \int_0^n \frac{x^{s+1}}{s+1} (n-1) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} \frac{1}{n} (-1) dx \right) \\ = & \frac{1}{s} \int_0^n \frac{1}{n} \frac{1}{s+1} (n-1) x^{s+1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} dx \\ = & \frac{n-1}{s \cdot n \cdot (s+1)} \int_0^n x^{s+1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} dx \end{aligned}$$

Ein drittes Mal die partielle Integration angewendet ergibt:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n-1}{s(s+1)n} \cdot \\
 &\quad \left( \frac{x^{s+2}}{s+2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} \Big|_0^n - \int_0^n \frac{x^{s+2}}{s+2} (n+2) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-3} \frac{1}{n} (-1) dx \right) \\
 &= \frac{n-1}{s(s+1)n} \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{n} (n-2) \int_0^n x^{s+2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-3} dx \\
 &= \frac{(n-1)(n-2)}{s(s+2)(s+2)n^2} \int_0^n x^{s+2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-3} dx
 \end{aligned}$$

Nun lässt sich bereits eine Gesetzmäßigkeit erkennen. So liefert  $k$ -mal die partielle Integration:

$$\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k-1)}{n^{k-1}s(s+1)(s+2)\dots(s+k-1)} \int_0^n x^{s+k-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k} dx$$

bzw.  $(n-1)$ -mal die partielle Integration:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1)-1)}{n^{(n-1)-1}s(s+1)(s+2)\dots(s+(n-1)-1)} \cdot \\
 &\quad \int_0^n x^{s+(n-1)-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-(n-1)} dx \\
 &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{n^{n-1}s(s+1)(s+2)\dots(s+n-2)} \int_0^n x^{s+n-2} \left(1 - \frac{x}{n}\right) dx \\
 &= \frac{n!}{n^{n-1}s(s+1)(s+2)\dots(s+n-2)} \int_0^n x^{s+n-2} \left(1 - \frac{x}{n}\right) dx
 \end{aligned}$$

Das verbleibende Integral kann nun durch eine weitere partielle Integration vollständig gelöst werden:

$$\begin{aligned}
&= \frac{n!}{n^{n-1}s(s+1)(s+2)\dots(s+n-2)} \cdot \\
&\quad \left( \frac{x^{s+n-1}}{s+n-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right) \Big|_0^n - \int_0^n \frac{x^{s+n-1}}{s+n-1} \frac{1}{n} (-1) dx \right) \\
&= \frac{n!}{n^{n-1}s(s+1)(s+2)\dots(s+n-2)} \cdot \frac{1}{n} \int_0^n \frac{x^{s+n-1}}{s+n-1} dx \\
&= \frac{n!}{n^{n-1}s(s+1)(s+2)\dots(s+n-2)} \cdot \frac{1}{n(s+n-1)} \cdot \frac{x^{s+n}}{s+n} \Big|_0^n \\
&= \frac{n!}{n^{n-1}s(s+1)(s+2)\dots(s+n-2)} \cdot \frac{n^{s+n}}{n(s+n-1)(s+n)} \\
&= \frac{n!n^{s+n}}{n^n s(s+1)(s+2)\dots(s+n-2)(s+n-1)(s+n)} \\
&= \frac{n!n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}
\end{aligned}$$

Damit erhält man als Endergebnis

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\dots(s+n)} = \Gamma(s)$$

wodurch die Äquivalenz der Gaußdarstellung und der Henkeldarstellung gezeigt ist. ■